**§ 7. Экстремум функции одной переменной**

(окончание лекции)

**п. 2. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба. Асимптоты**

***Определение.*** График дифференцируемой функции  называется *выпуклым* (*выпуклым вверх*) в интервале , если он целиком расположен ниже касательной, проведенной к этому графику в любой точке  (рис 1, а).

***Определение.*** График дифференцируемой функции  называется *вогнутым* (*выпуклым вниз*) в интервале , если он целиком расположен ниже касательной, проведенной к этому графику в любой точке  (рис 1, б).

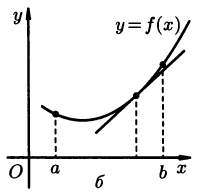
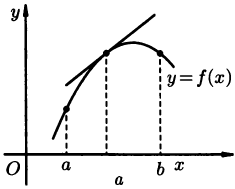
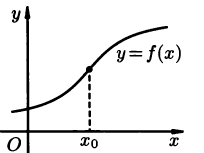


Рис.1

***Теорема*** (достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции).

Если функция  дважды дифференцируема на  и  для любого , то график функции на  выпуклый; если же  для любого , то график функции на  вогнутый.

Точка  графика непрерывной функции , в которой выпуклость меняется на вогнутость и наоборот, называется *точкой перегиба* (рис 2).

***Теорема*** (необходимое условие существования точки перегиба). Если  – точка перегиба графика функции , то Рис. 2

 или  не существует.

Точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует называются *критическими точками второго рода*.

Критические точки второго рода – это точки возможного перегиба графика функции.

***Теорема*** (первое достаточное условие существования точки перегиба).

Пусть функция  дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки  и непрерывна в самой точке . Тогда, если при переходе через точку  вторая производная меняет знак с  на  или с  на , то  – точка перегиба.

***Теорема*** (второе достаточное условие существования точки перегиба).

Пусть в точке  функция  имеет производные до третьего порядка включительно. Тогда, если  а , то  – точка перегиба.

*Алгоритм нахождения интервалов выпуклости и точек перегиба графиков функций*

**1)** Находим область определения  функции , точки разрыва;

**2)** Находим  и ;

**3)** Находим точки, принадлежащие области определения функции, в которых  или  не существует. Это критические точки второго рода (точки возможного перегиба графика функции);

**4)** Строим числовую прямую и на ней отмечаем критические точки второго рода и точки, в которых функция не определена (их отмечаем выколотыми, т. е. не закра-шенными). Эти точки разбивают область определения функции на интервалы, в каждом из которых вторая производная сохраняет знак. Определяя знак производной на каждом интервале, находим направление выпуклости графика функции: если , то график функции является выпуклым; если же  – вогнутым.

**5)** Если вторая производная меняет знак при переходе через критическую точку второго рода, то эта точка является точкой перегиба графика функции; если знак второй производной не меняется, то в этой точке перегиба нет.

***Пример.*** Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графиков функций:

а) ; б) .

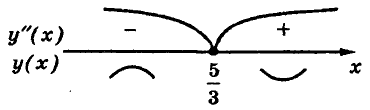
▲ *Решение*.

а) Задачу решаем согласно приведенному выше алгоритму.

**1)** , т. е. функция определена на всей числовой прямой;

**2)** ;

**3)**  – критическая точка второго рода; точек, в которых  не существует, нет;

**4)** На интервале  вторая производная , следовательно на этом интервале график функции является выпуклым; на интервале  , следовательно на этом интервале график функции является вогнутым;

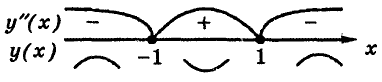
**5)** При переходе через точку  вторая производная меняет знак, следовательно эта точка является точкой перегиба: .

б) .

**1)** , т. е. функция определена на всей числовой прямой;

**2)** ;

**3)**  – критические точки второго рода; точек, в которых  не существует, нет;

**4)** На интервалах  и вторая производная , следовательно на этих интервалах график функции является выпуклым; на интервале  , следовательно на этом интервале график функции является вогнутым.

**5)** При переходе через точки  и  вторая производная меняет знак, следовательно эти точки являются точками перегиба: . ▲

***Определение.*** Прямая *L* называется *асимптотой* кривой , если расстояние от точки  кривой до прямой *L* стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по кривой *L* от начала координат в бесконечность.

Асимптоты бывают трех видов: вертикальные, наклонные и горизонтальные.

Прямая  называется *вертикальной асимптотой* графика функции  если хотя бы один из односторонних пределов  или  равен . Например, прямая  является вертикальной асимптотой графика функции  так как .

Заметим, что непрерывная функция вертикальных асимптот не имеет.

*Наклонные асимптоты* кривой , если они существуют, задаются уравнениями , где параметры  и  определяются по формулам

,

или

.

Если  или  не существует или равен , то кривая  наклонных асимптот не имеет.

Если  или , то прямая  является *горизонтальной асимптотой* кривой .

Очевидно, горизонтальная асимптота – частный случай наклонной (при ).

***Пример.*** Найти асимптоты графика функции .

▲ *Решение*. Функция  определена на всей числовой оси, кроме точек  и . Рассмотрим поведение функции в окрестности этих точек.

Для точки  имеем:

, , следовательно, прямая  – вертикальная асимптота графика функции.

Для точки  имеем:

, , следовательно, прямая  также является вертикальной асимптотой графика функции.

Таким образом, график функции имеет две вертикальные асимптоты:  и .

Ищем наклонные асимптоты:

,

.

Таким образом, прямая  – наклонная асимптота графика функции при . При  получаем такие же значения коэффициентов  и : , и ту же наклонную асимптоту .

Горизонтальных асимптот график функции не имеет, так как . ▲

**п. 3. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке**

Пусть функция  непрерывна на отрезке . Следовательно, согласно второй теореме Вейерштрасса, эта функция достигает на данном отрезке своих наибольшего и наименьшего значений. Эти значения принимаются либо во внутренних точках отрезка , либо на его концах.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке  необходимо:

1. найти критические точки функции, принадлежащие интервалу ;
2. вычислить значения функции в найденных критических точках и на концах отрезка, т. е. в точках  и ;
3. среди всех вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

***Замечание*.** Если функция  на отрезке  не имеет критических точек, то это означает, что на нем функция монотонно возрастает или убывает. Следовательно, свое наибольшее значение функция принимает на одном конце отрезка, а наименьшее – на другом.

***Пример.*** Найти наибольшее и наименьшее значения функции  на отрезке .

▲ *Решение*. Находим критические точки данной функции:

;

 при  и . Критическая точка  не принадлежит интервалу , поэтому ее исключаем из рассмотрения; вторая критическая точка  принадлежит интервалу . Вычисляем значения функции в точке  и на концах отрезка:



Сравнивая полученные числа, заключаем, что наименьшее значение на отрезке  функция принимает в точке , при этом , а наибольшее значение – в точке , при этом . ▲

**п. 4. Общая схема исследования функции и построения ее графика**

Для полного исследования функции и построения ее графика целесообразно пользоваться следующей схемой:

1. найти область определения функции;
2. исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность;
3. найти интервалы возрастания, убывания и экстремумы функции (с помощью первой производной);
4. найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба (с помощью второй производной);
5. найти участки непрерывности функции, точки разрыва, асимптоты графика функции;
6. найти точки пересечения графика с осями координат;
7. Построить график функции.

***Пример.*** Провести полное исследование функции  и построить ее график.

▲ *Решение*. Воспользуемся рекомендованной схемой.

1. Данная функция определена на всей числовой прямой, т. е. .
2. Функция не является четной, нечетной, периодической.
3. Находим производную функции:

;

 при  и не существует в точках  и . Эти точки разбивают всю область определения функции на интервалы . Внутри каждого из полученных интервалов производная сохраняет знак, а именно:  в интервалах  и  в интервале . Это означает, что функция возрастает в интервале , убывает в интервале  и возрастает в интервале . Так как при переходе слева направо через критическую точку  первая производная меняет знак с  на , то  является точкой максимума: . Для точки  знак первой производной изменяется с  на , т. е.  – точка минимума: . В точке  функция экстремума не имеет, так как при переходе через эту точку производная  не меняет знак.

Для удобства построения графика, занесем результаты исследования в таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* |  | -3 |  | -2 |  | 0 |  |
|  | + | Не сущ. | + | 0 | - | Не сущ. | + |
|  |  | 0 |  | Max |  | Min  0 |  |

В этой таблице стрелка  указывает на возрастание функции, а стрелка  – на убывание.

1. Находим вторую производную:

,

которая не равна нулю для любого конечного . Поэтому точками перегиба могут быть только те точки кривой, в которых вторая производная не существует, т. е  и . Определим знак  в каждом из интервалов, на которые найденные точки разбивают область определения функции:  при , кривая вогнута;  при , кривая выпукла;  при , кривая выпукла. Так как при переходе слева направо через критическую точку второго рода  вторая производная меняет знак, то  является точкой перегиба. Точка  не является точкой перегиба, так как при переходе через эту точку производная  не меняет знак.

Заносим результаты исследования в таблицу

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* |  | -3 |  | 0 |  |
|  | + | Не сущ. | - | Не сущ. | - |
|  |  | т. перегиба |  | 0  перегиба нет |  |

В этой таблице значок  указывает на вогнутость графика функции, а значок  – на выпуклость.

1. Функция непрерывна на всей числовой прямой, следовательно, точек разрыва не имеет, а значит не имеет и вертикальных асимптот. График функции имеет наклонную асимптоту , если существуют пределы для  и , указанные в правиле нахождения наклонной асимптоты. Вычислим их для данной функции:

,





.

Таким образом, прямая  – наклонная асимптота при . При  получим такие же значения для  и .

1. Найдем точки пересечения графика с осями координат. С осью *Oy* график пересекается при , откуда , т. е.  – точка пересечения с осью *Oy*. С осью *Ox* график пересекается, если , т. е. , откуда  или . Таким образом,  и  – точки пересечения графика с осью *Ox*.
2. По полученным данным строим график функции (рис. 3).

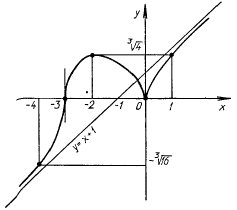


Рис. 3